Problemi di Stima

Daniele B. Provenzano, Sigillo 2024

Problema 1 (Stime pesanti). Stima quanto pesano i seguenti esseri viventi in kg:

- formica,
- capra,
- elefante,
- balenottera azzurra,
- batterio.

Problema 2 (Big Money). Quante banconote da 50 euro servirebbero per ricoprire l'intera superficie terrestre?

Problema 3 (Archimede). Stima quanto vale, in N, la spinta di Archimede che sta agendo sul tuo corpo in questo momento.

Problema 4 (Massa dell'atmosfera). Quanto vale, in kg, la massa dell'intera atmosfera terrestre?

Problema 5 (Massa della Terra). La distanza media tra la Terra e la Luna è circa 3.8×10^5 km. A partire da questa informazione, stima quanto vale la massa della Terra.

Problema 6 (Rotazione terrestre). A partire dal risultato del problema precedente, stima quanto vale l'energia cinetica di rotazione della Terra attorno al suo asse passante per i poli.

Problema 7 (Massa del Sole). La luce emessa dal Sole impiega circa 8.33 min per arrivare sulla Terra. Quanti protoni ci sono nel Sole?

Problema 8 (L'ultimo respiro). Quante *molecole di aria* passano attraverso le nostre narici durante un'inspirazione?

Problema 9 (**Martin il pescatore**, tratto dalla Finale della Gara a Squadre 2023)**.** Martin il pescatore si sporge dalla sua barca, riempie un bicchiere con acqua di mare (di massa molare pari a $18\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$) e lo svuota nuovamente in mare subito dopo. Moltissimi anni dopo, quando l'acqua presa nel bicchiere si è ormai rimescolata completamente in tutti i mari del pianeta (i quali ricoprono circa il 70% della superficie terrestre e sono profondi in media $4\,\mathrm{km}$), Martin si trova nuovamente sulla sua barca. Egli riempie una seconda volta lo stesso bicchiere. Quante sono le molecole che Martin ha pescato entrambe le volte con il bicchiere?

Problema 10 (**Tempo di crescita di un albero**)**.** La costante solare $C_S \sim 1\,\mathrm{kW/m^2}$ è la quantità di radiazione elettromagnetica per unità di superficie e tempo che arriva sulla Terra dal Sole. La radiazione solare, attraverso la fotosintesi, è responsabile della formazione della materia organica vegetale a partire da acqua e anidride carbonica. L'efficienza del processo di fotosintesi è dell'ordine dell'1%. Assumendo che l'energia per unità di massa immagazzinata nel legno sia dell'ordine del potere calorifico $P_C \sim 10^7\,\mathrm{J/Kg}$, stima quanto tempo occorre affinché un albero cresca di 10 metri.

Soluzioni

Soluzione 1 (**Stime pesanti**)**.** Ci sono due modi per farlo: cercare di indovinare direttamente la massa in base al buonsenso oppure cercare di indovinare il volume e poi moltiplicare per la densità dell'acqua. Nel caso del batterio, che è una cellula, conviene usare il secondo metodo.

- formica $\approx 10^{-3}\,\mathrm{kg}$,
- capra $\approx 10\,\mathrm{kg}$,
- elefante $\approx 10^3\,\mathrm{kg}$,
- balenottera azzurra $\approx 10^5\,\mathrm{kg}$,
- batterio $\approx 10^{-15} - 10^{-16}\,\mathrm{kg}$.

Soluzione 2 (**Big Money**)**.** Facendo il rapporto tra le due aree e stimando l'area della banconota, viene fuori

$$N \approx 5 \cdot 10^{16}.$$

Soluzione 3 (**Archimede**)**.** Sfruttando il fatto che galleggiamo, per poco, in acqua, possiamo dire che il nostro volume in litri è circa uguale alla nostra massa in chili. Allora, una persona di $50\,\mathrm{kg}$ occupa circa $50\,\mathrm{L}$, quindi la spinta di Archimede vale circa

$$F_A = \rho V g \approx 50 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \approx 0.5\,\mathrm{N}.$$

Soluzione 4 (**Massa dell'atmosfera**)**.** Sfruttando il fatto che l'atmosfera è concentrata in una zona poco spessa e sapendo quanto vale la pressione atmosferica, segue che

$$M_{\mathrm{atm}} \approx \frac{4\pi R_T^2 P_0}{g} \approx 5 \times 10^{18}\,\mathrm{kg}.$$

Soluzione 5 (Massa della Terra). Dalla terza legge di Keplero

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_T},$$

da cui

$$M_T = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}.$$

Sapendo che la Luna impiega circa un mese a compiere una rotazione attorno alla Terra, viene fuori che

$$M_T \approx 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}.$$

Soluzione 6 (Rotazione terrestre). Conoscendo la massa e il raggio della Terra è possibile risalire al momento di inerzia della stessa, approssimandola ad una sfera omogenea. L'energia cinetica rotazionale vale

$$K_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} I\omega^2 \approx 10^{29}\,\mathrm{J},$$

dove si è sfruttato il fatto che la Terra compie una rotazione in un giorno.

Soluzione 7 (Massa della Sole). Il calcolo della massa del Sole passa per la terza legge di Keplero, in cui il raggio dell'orbita va calcolato usando l'informazione sul tempo che la luce impiega per andare dalla stella alla Terra. Una volta trovata la massa, bisogna dividerla per la massa del protone. Il risultato è circa 10^{57}.

Soluzione 8 (L'ultimo respiro). La prima stima da fare è sul volume dell'aria che i nostri polmoni possono ospitare. Un litro è già una buona stima. La legge dei gas perfetti implica che

$$N = \frac{P_{\mathrm{atm}} V}{k_B T_{\mathrm{ambiente}}} \approx 2 \times 10^{22}.$$

Soluzione 9 (Martin il pescatore). Possiamo impostare la seguente proporzione:

$$x : n_{\mathrm{bicchiere}} = n_{\mathrm{bicchiere}} : N_{\mathrm{oceano}}, \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{n_{\mathrm{bicchiere}}^2}{N_{\mathrm{oceano}}}.$$

Calcoliamo il volume degli oceani: esso è un sottile strato di spessore medio $h = 4\,\mathrm{km}$ su una sfera di raggio R_T, dunque il suo volume è

$$V_{\mathrm{oceano}} = f\, 4\pi R_T^2 h,$$

dove $f = 0.7$. Indicando con M_{a} la massa molecolare dell'acqua e con N_A il numero di Avogadro, il numero di molecole di acqua nell'oceano è

$$N_{\mathrm{oceano}} = V_{\mathrm{oceano}}\, N_A\, \rho_{\mathrm{a}}/M_{\mathrm{a}},$$

mentre quelle nel bicchiere sono

$$n_{\mathrm{bicchiere}} = V_{\mathrm{bicchiere}}\, N_A\, \rho_{\mathrm{a}}/M_{\mathrm{a}}.$$

Quindi

$$x = \frac{n_{\mathrm{bicchiere}}^2}{N_{\mathrm{oceano}}} = \frac{V_{\mathrm{bicchiere}}^2\, \rho_{\mathrm{a}} N_A}{4\pi R_T^2 h f M_a} \approx 10^3.$$

Soluzione 10 (Tempo di crescita di un albero). L'energia solare che investe le foglie dell'albero viene immagazzinata nella nuova massa di legno che si forma e fa ingrandire la pianta. In realtà, come specificato dal testo, solo l'1% dell'energia che giunge sulle foglie viene serve effettivamente a far crescere l'albero. Consideriamo un albero con una chioma di area A e un tronco di raggio R. In un certo intervallo di tempo Δt, sulla chioma arriva la seguente quantità di energia solare

$$\Delta E = C_s A \, \Delta t.$$

Se l'albero cresce di Δh metri mantenendo invariato il raggio del tronco, la quantità di energia immagazzinata nella massa Δm che si è aggiunta è

$$P_C \, \Delta m = P_C \, \pi R^2 \Delta h \, \rho_{\text{legno}}.$$

Visto che quest'ultima quantità è l'1% dell'energia che arriva sulle foglie, si ha che

$$\Delta t = \frac{100 \, P_C \, \pi R^2 \Delta h \, \rho_{\text{legno}}}{C_s A}.$$

Come ultimo accorgimento, bisogna moltiplicare questa quantità per 2, perché di notte non ci sono raggi! Sostituendo i valori delle costanti date dal testo e dei valori sensati per le grandezze che caratterizzano l'albero, il tempo viene dell'ordine dei decenni.